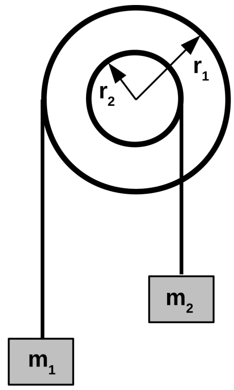
Lösungsblatt 10
zur Experimentalphysik I

Sommersemester 2014 - Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1 Drehmoment 1 (Präsenzaufgabe)



Zwei miteinander verbundene Räder der Radien r_1 und r_2 sind drehbar an einer Achse befestigt. Das Gesamtträgheitsmoment der Räder sei I. Wie in der Abbildung dargestellt, sind zwei Massestücke der Massen m_1 und m_2 über masselose Seile an den Rädern befestigt.

a) Wie muss das Verhältnis der beiden Massen gewählt werden, damit sich das System im Gleichgewicht befindet?

b) Die Massen seien jedoch so gewählt, dass m_2 zu klein ist um das System im Gleichgewicht zu halten. Berechnen Sie die Winkelbeschleunigung und die Zugkräfte in den beiden Seilen.

Lösung

a) Das System ist im Gleichgewicht, wenn die von den beiden Massestücken ausgeübten Drehmomente betragsmäßig gleich sind.
Aus $\tau_1 = \tau_2$ und $\tau_i = F_i r_i$ folgt
$m_1 r_1 g = m_2 r_2 g$ und somit
$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1}$.

b) Die Masse m_2 ist zu gering um das System im Gleichgewicht zu halten. Für die auf Massestück 1 und 2 wirkenden Kräfte gilt also
$F_1 = m_1 a_1 = m_1 g - T_1$
$F_2 = m_2 a_2 = T_2 - m_2 g$.

Da die Räder miteinander verbunden sind, gilt
$\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{a_1}{r_1} = \frac{a_2}{r_2}$.

Für die Zugkräfte gilt also
$T_1 = m_1 g - m_1 a_1 = m_1(g - a_1) = m_1(g - r_1\alpha)$
$T_2 = m_2 a_2 + m_2 g = m_2(a_1 + g) = m_2(r_2\alpha + g)$.

Auf das System wirkt das Drehmoment
$\tau = T_1 r_1 - T_2 r_2 = I\alpha$.
Für α folgt demnach
$r_1 m_1(g - r_1\alpha) - r_2 m_2(g + r_2\alpha) = I\alpha$
$g(r_1 m_1 - r_2 m_2) - \alpha(r_2^2 m_2 + r_1^2 m_1) = I\alpha$
$\alpha(I + (r_2^2 m_2 + r_1^2 m_1)) = g(r_1 m_1 - r_2 m_2)$
$\alpha = \frac{g(r_1 m_1 - r_2 m_2)}{I + r_1^2 m_1 + r_2^2 m_2}$.

Name, Vorname: ____________________ Matrikelnummer: ⊔⊔⊔⊔⊔⊔⊔

Aufgabe 10.2 Rollen und Gleiten (Präsenzaufgabe)

Zwei identische Vollzylinder mit Masse m und Radius r befinden sich auf schiefen Ebenen der Höhe h die sich nur in der Beschaffenheit ihrer Oberflächen unterscheiden. Die Zylinder werden zum selben Zeitpunkt aus der Ruhe heraus losgelassen. Zylinder 1 gleitet ohne zu rollen und Zylinder 2 rollt ohne zu gleiten. Berechnen Sie das Verhältnis der Geschwindigkeiten v_g und v_r der beiden Zylinder am Ende der schiefen Ebenen.
Reibung soll in dieser Rechnung vernachlässigt werden.

Lösung
Für den gleitenden Zylinder wird die potentielle Energie in kinetische Energie umgewandelt. Es gilt
$E_{pot} = E_{kin}$
$mgh = \frac{1}{2}mv_g^2$
und somit
$v_g = \sqrt{2gh}$.

Für den rollenden Zylinder wird die potentielle Energie in kinetische sowie Rotationsenergie umgewandelt. Es gilt
$E_{pot} = E_{kin} + E_{rot}$
$mgh = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$.
Mit dem Zusammenhang zwischen Roll- und Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{v_r}{r}$ und dem Trägheitsmoment $I = \frac{1}{2}mr^2$ gilt
$mgh = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{1}{4}mv_r^2 = \frac{3}{4}mv_r^2$
Und somit
$v_r = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$.

Das Verhältnes von v_g und v_r beträgt also
$\frac{v_g}{v_r} = \sqrt{\frac{6gh}{4gh}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ =1,22.

Aufgabe 10.3 Garnrolle (3 Punkte)

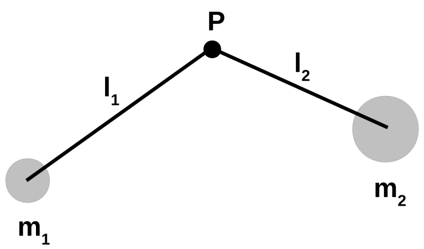
Auf eine zylindrische Rolle (Vollzylinder) mit Radius $r = 10$ cm und Masse M ist ein Faden der Länge $L = 10$ m gewickelt. Am Ende des Fadens hängt ein Massestück mit $m = \frac{M}{2}$. Auf Grund der Gewichtskraft des Massestücks, wird der Faden von der Rolle abgewickelt. Wie groß ist die Drehzahl der Rolle, wenn die Länge des abgewickelten Fadens $l = 2$ m beträgt?

Lösung
Die potentielle Energie des Massestücks wird in kinetische Energie des Massestücks, sowie Rotationsenergie der Rolle umgewandelt:
$E_{pot} = E_{kin} + E_{rot}$
$mgl = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$
Die Rolle hat das Trägkeitsmoment $I = \frac{1}{2}Mr^2$ und der Zusammenhang zwischen v und r lautet $v = \omega r$. Somit gilt
$mgl = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}2mr^2\omega^2$
$gl = \omega^2 r^2$.
Die Drehzahl beträgt also
$n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{gl}}{2\pi r}$ =7,05 $\frac{1}{\mathrm{s}}$.

(Die Angabe $L = 10$ m wird zum Lösen der Aufgabe nicht benötigt.)

Aufgabe 10.4 Drehmoment 2 (3 Punkte)

Zwei Massen sind wie in der Abbildung dargestellt, an masselosen Stangen befestigt. Die Stangen sind miteinander verbunden, sodass der von den Stangen eingeschlossene Winkel $\alpha = 120°$ konstant ist. Das System ist drehbar im Punkt P befestigt. Die bekannten Größen sind $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, l_1 =0,5 m und l_2 =0,4 m



a) Berechnen Sie das Gesamtdrehmoment des Systems bezüglich des Punktes P, in Abhängigkeit des Winkels ϕ zwischen Stange 2 und der x-Achse.

b) Wie groß ist ϕ, wenn das System im Gleichgewicht ist?

Lösung

a) Die Bewegung findet in der x-y-Ebene statt, wobei der Punkt P als Koordinatenursprung gewählt wird. Für das Gesamtdrehmoment gilt
$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2$
mit
$\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$.

Die wirkenden Kräfte sind

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_1 g \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_2 g \\ 0 \end{pmatrix}$$

und die Ortsvektoren der Massenmittelpunkte

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} -l_1 \cos\theta \\ -l_1 \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \cos(\alpha+\phi) \\ -l_1 \sin(\alpha+\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} l_2 \cos\phi \\ -l_2 \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

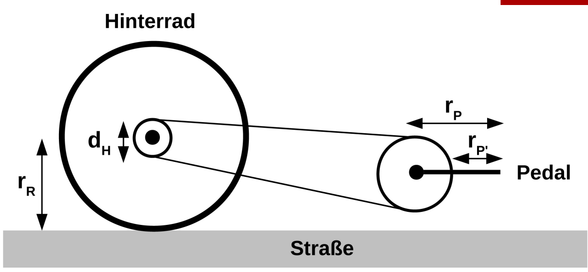
Hierbei ist θ der Winkel zwischen l_1 und der x-Achse. Demnach wurden die folgenden Zusammenhänge genutzt
$\theta = 180° - \alpha - \phi$
$\cos\theta = \cos(180° - (\alpha+\phi)) = \cos 180° \cos(\alpha+\phi) + \sin 180° \sin(\alpha+\phi) = -\cos(\alpha+\phi)$
$\sin\theta = \sin(180° - (\alpha+\phi)) = \sin 180° \cos(\alpha+\phi) - \cos 180° \sin(\alpha+\phi) = \sin(\alpha+\phi)$.
Es folgt

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_{1x}F_{1y} + r_{2x}F_{2y} \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_1 l_1 \cos(\alpha+\phi) - m_2 l_2 \cos\phi \end{pmatrix}$$

b) Im Gleichgewicht ist $\vec{\tau} = \vec{0}$. Somit gilt
$m_1 l_1 \cos(\alpha+\phi) = -m_2 l_2 \cos\phi$
$m_1 l_1 (\cos\alpha \cos\phi - \sin\alpha \sin\phi) = -m_2 l_2 \cos\phi$
$\cos\alpha - \sin\alpha \tan\phi = -\frac{m_2 l_2}{m_1 l_1}$
$\phi = \arctan\left(\frac{\cos\alpha + \frac{m_2 l_2}{m_1 l_1}}{\sin\alpha}\right)$ =51,78°

Name, Vorname: ____________________ Matrikelnummer:

Aufgabe 10.5 Fahrrad (2 Punkte)



Ein Fahrradfahrer übt die Kraft $F_P = 90$ N auf das Pedal aus. Wie groß ist die Kraft F_S, die in Folge dessen vom Hinterrad auf die Straße ausgeübt wird?
Die in der Abbildung eingezeichneten Größen betragen $r_P = 17$ cm, $r_{P'} = 8$ cm, $d_H = 6$ cm und $r_R = 35$ cm.

Lösung
Das am Vorderrad angreifende Drehmoment ist
$D_V = F_P r_P$.
Dieses Drehmoment führt zu einer Kraft
$F_K = \frac{D_V}{r_V}$
auf die Kette, worbei $r_V = r_P - r_{P'}$ der Radius des vorderen Zahnkranzes ist. Demnach gilt
$F_K = \frac{D_V}{r_P - r_{P'}}$.
Die Kraft F_K übt auf den hinteren Zahnkranz das Drehmoment
$D_H = F_K r_H$
aus, wobei $r_H = \frac{d_H}{2}$ der Radius des hinteren Zahnkranzes ist.
Da das Hinterrad fest mit dem hinteren Zahnkranz verbunden ist, wird auf das Rad das gleiche Drehmoment ausgeübt.
$D_R = D_H$
und die auf die Straße ausgeübte Kraft beträgt
$F_S = \frac{D_R}{r_R} = \frac{D_H}{r_R} = \frac{F_K d_H}{2r_R} = \frac{D_V d_H}{2r_R(r_P - r_{P'})} = \frac{F_P r_P d_H}{2r_R(r_P - r_{P'})} =$14,57 N.

Aufgabe 10.6 Sprungbrett (5 Punkte)

Eine Person steht am Rand eines Sprungbretts und lässt sich völlig gestreckt vornüber fallen. Wie hoch muss das Sprungbrett über der Wasseroberfläche sein, damit die Person mit dem Kopf voraus ins Wasser eintaucht?
Die Person hat eine Körpergröße von $l =$180 m. Ihr Schwerpunkt sei in der Körpermitte. Für das Trägheitsmoment der Person bezüglich ihres Schwerpunkts soll $I = \frac{1}{2}ml^2$ angenommen werden.

Lösung
Die Drehachse der Person befindet sich auf Höhe der Füße. Das Trägheitsmoment bezüglich dieser Achse kann mit Hilfe des Steinerschen Satzes bestimmt werden:
$I' = \frac{1}{2}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}ml^2$

In Phase 1 dreht sich die Person um ihre Füße, ohne das sich diese vom Sprungbrett lösen. In dieser Phase Dreht sich die Person um 90°.
In Phase 2 lösen sich die Füße vom Sprungbrett. Der Körper rotiert nun um seinen Schwerpunkt. Dieser weist eine zusätzliche Translationsbewegung auf.

Phase 1:
Die potentielle Energie des Körpers wird in Rotationsenergie umgewandelt. Unmittelbar nach der Drehung um 90° gilt
$E_{pot} = E_{kin}$
$mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}I'\omega^2$
und demnach ist
$\omega = \sqrt{\frac{4mgl}{3ml^2}} = \sqrt{\frac{4g}{3l}}$
die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die Füße.

Phase 2:
Gesucht ist nun die Winkelgeschwindigkeit der Drehung des Körpers um den Schwerpunkt, nach dem sich die Füße von dem Sprungbrett gelöst haben.

Unmittelbar nach der ersten Drehung um 90° ist die Geschwindigkeit des Kopfes $v_K = \omega l$ und die Geschwindigkeit des Schwerpunkts $v_{SP} = \omega \frac{l}{2}$. Für die Geschwindigkeit des Kopfes im Schwerpunktsystem gilt also in diesem Moment
$v_K^{(SP)} = v_K - v_{SP} = \omega l - \frac{\omega l}{2} = \frac{\omega l}{2}$.
Damit ist die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um den Schwerpunkt
$\omega' = \frac{v_K^{(SP)}}{\frac{l}{2}} = \frac{2}{l}\omega\frac{l}{2}$
$\omega = \omega'$.

Die Zeit in der sich der Körper um weitere 90° dreht beträgt
$t = \frac{T}{4} = \frac{1}{4}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2\omega}$.
In dieser Zeit führt der Schwerpunkt eine beschleunigte Translation aus. Der Schwerpunkt fällt in dieser Zeit also um die Strecke
$s = \frac{1}{2}gt^2 + v_{SP}t$.
Damit die Person mit dem Kopf vorweg ins Wasser eintaucht muss sich das Brett also
$h = s + \frac{l}{2}$
über der Wasseroberfläche befinden.

Nun können alle Größen eingesetzt werden und das Ergebnis beträgt
$h = s + \frac{l}{2}$
$h = \frac{1}{2}gt^2 + v_{SP}t + \frac{l}{2}$
$h = \frac{g\pi^2}{8\omega^2} + \frac{\pi l}{4} + \frac{l}{2}$
$h = \frac{g\pi^2 3l}{32g} + \frac{\pi l}{4} + \frac{l}{2}$
$h = l\left(\frac{3\pi^2}{32} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$=398 cm=3,98 m.

Aufgabe 10.7 Bowling (3 Punkte)

Eine Bowlingkugel mit Masse m und Radius r wird auf die Bahn geworfen. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ trifft sie auf der Bahn auf und gleitet mit der Geschwindigkeit v_0. Gleichzeitig beginnt die Kugel zu rotieren. Zum Zeitpunkt t_1 beginnt sie zu rollen ohne zu gleiten. Wie lange dauert es bis die Kugel anfängt zu rollen?
Der Reibungskoeffizient μ_k sei bekannt.

Lösung

Phase 1:
Die Kugel gleitet und es gilt
$ma = -\mu_k F_N = -\mu_k mg$.
Die Reibung bewirkt eine Abbremsung der Translationsgeschwindigkeit der Kugel. Für die Schwerpunktsgeschwindigkeit gilt
$v_{SP}^{(1)} = v_0 + at = v_0 - \mu_k gt$.

Weiterhin beginnt die Kugel um ihren Schwerpunkt zu rotieren. Das zweite Newtonsche Gesetz für die Rotation lautet
$\tau_{SP} = I_{SP}\alpha_{SP}$.
Außerdem gilt
$\tau_{SP} = \mu_k F_N r = \mu_k mgr$.
Die Winkelbeschleunigung der Kugel zum Zeitpunkt t_0 ist also
$\alpha_{SP} = \frac{\mu_k mgr}{I_{SP}}$.
Mit dem Trägheitsmoment der Kugel $I_{SP} = \frac{2}{5}mr^2$ ergibt sich
$\alpha_{SP} = \frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{r}$.
Die Winkelgeschwindigkeit ist demnach
$\omega_{SP} = \omega_0 + \alpha_{SP}t = 0 + \alpha_{SP}t = \frac{5\mu_k gt}{2r}$

Phase 2:
Zum Zeitpunkt t_1 hört die Kugel auf zu gleiten. Die Bewegung ist nun eine reine Rotation. Demnach gilt $v_{SP}^{(2)} = \omega_{SP} r$.
Der Zeitpunkt für den die Kugel rollt ohne zu geiten ist also erreicht, wenn gilt:
$v_{SP}^{(1)}(t_1) = v_{SP}^{(2)}(t_1)$
Es gilt demnach
$v_0 - \mu_k g t_1 = \frac{5\mu_k g t_1}{2}$
$v_0 = \frac{5}{2}\mu_k g t_1 + \mu_k g t_1 = \frac{7}{2}\mu_k g t_1$ und das Ergebnis lautet $t_1 = \frac{2v_0}{7\mu_k g}$.