Lösungsblatt 11
zur Experimentalphysik I

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014 - Übungsblatt 11

Aufgabe 11.1 Drehhocker und Hanteln (Präsenzaufgabe)

Eine Person sitzt auf auf einem Drehhocker und hält zwei Hanteln mit ausgestreckten Armen. Die Person und der Drehhocker haben das Gesamtträgheitsmoment $I_0 = 4\ \mathrm{m^2kg}$ bezüglich der Drehachse. Der Abstand zwischen Hantel und Drehachse beträgt bei ausgestreckten Armen $r_1 = 90$ cm. Die Hanteln sollen in der Rechnung als punktförmig angenommen werden und haben jeweils die Masse $m = 10$ kg. Reibungseffekte sollen vernachlässigt werden.

a) Der Hocker ist zunächst in Ruhe. Eine zweite Person zieht tangential zur Drehbewegung an einer der Massen, sodass sich Hocker und Person nach einer Zeit von $t = 0{,}5$ s mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 = 2{,}5\ \frac{1}{\mathrm{s}}$ drehen. Wie groß ist der gesamte Drehimpuls L_1 des Systems? Wie groß war die tangentiale mittelere Zugkraft der zweiten Person?

b) Die Person auf dem Hocker zieht die Hanteln nun näher zu sich heran, sodass deren Abstand zur Drehachse $r_2 = 40$ cm beträgt. Wie groß ist nun die Winkelgeschwindigkeit ω_2? Welche Arbeit wurde verrichtet?

c) Nun lässt die Person die Hanteln fallen. Wie ändert sich die Drehzahl?

Lösung:

a) Für den Drehimpuls gilt $L_1 = I_1\omega_1$.
Da die Hanteln als punktförmig behandelt werden sollen, gilt für das Drehmoment des Systems aus Hocker, Hanteln und Person
$I_1 = I_0 + 2mr_1^2$.
Somit beträgt der Drehimpuls
$L_1 = \left(I_0 + 2mr_1^2\right)\omega_1 = 50{,}5\ \frac{\mathrm{m^2kg}}{\mathrm{s}}$.

Für die tangentiale mittelere Zugkraft gilt
$F = \frac{L_1}{r_1 \Delta t} = 112{,}22$ N.

b) Der Drehimpuls bleibt erhalten. Demnach gilt
$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$.
Aus
$I_1 = I_0 + 2mr_1^2 = 20{,}2\ \mathrm{m^2kg}$
$I_2 = I_0 + 2mr_2^2 = 7{,}2\ \mathrm{m^2kg}$
folgt
$\omega_2 = \omega_1\frac{I_1}{I_2} = 7{,}01\ \frac{1}{\mathrm{s}^2}$.

Die verrichtete Arbeit entspricht der Zunahme der Rotationsenergie
$\Delta E_{rot} = E_{rot_2} - E_{rot_1} = \frac{1}{2}\left(I_2\omega_2^2 - I_1\omega_1^2\right) = 113{,}78$ Nm.

c) Die Drehzahl verändert sich nicht, da keine Arbeit verrichtet wurde. Die Hanteln gehören nicht mehr zum System.

Aufgabe 11.2 Schwungrad 1 (Präsenzaufgabe)

Wie lange braucht ein Schwungrad mit Trägheitsmoment $I = 500\ \mathrm{kgm}^2$ um aus dem Stillstand eine Drehzahl von $480/\mathrm{min}$ zu erreichen, wenn ein konstantes Drehmoment von $3000\ \mathrm{Nm}$ wirkt?

Lösung:
Die Winkelgeschwindigkeit ω_E zum Zeitpunkt t_E, an dem die geforderte Drehzahl erreicht ist erhält man durch Integration der Winkelbeschleunigung
$\omega_E = \int_0^{t_E} \frac{d\omega}{dt} dt.$
Für den Drehimpuls gilt
$L = I\omega$
und somit
$\omega = \frac{L}{I}.$
Das Trägheitsmoment ist natürlich zeitlich konstant und es gilt
$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{I}\frac{dL}{dt}$
beziehungsweise wegen $\frac{dL}{dt} = \tau$
$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\tau}{I}.$
Eingestetzt ergibt sich
$\omega_E = \int_0^{t_E} \frac{\tau}{I} dt = \frac{\tau}{I} t_E.$

Weiterhin kann man ω_E durch die Drehzahl ausdrücken
$\omega_E = 2\pi f_E = 2\pi \frac{480}{\mathrm{min}}.$

Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für ω_E ergibt
$t_E = \frac{2\pi 480 I}{60\tau}\frac{1}{s} = 8{,}38\ \mathrm{s}.$

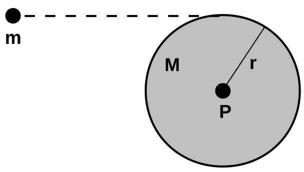
Aufgabe 11.3 Corioliskraft (1 Punkt)

Wie groß ist die Corioliskraft die auf ein Auto wirkt das auf Höhe des 49. Breitengrades von Süden nach Norden fährt? Die Masse und Geschwindigkeit des Autos betragen $m = 110\ \mathrm{t}$ und $v = 100\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

Lösung:
Für die Corioliskraft gilt
$\vec{F_C} = 2m\,(\vec{v} \times \vec{\omega}).$
Durch geometrische Überlegungen findet man für den Betrag der Kraft
$F_C = 2mv\omega \sin(49°).$
Mit $\omega = \frac{2\pi}{24\ \mathrm{h}}$ ergibt sich $F_C = 335\ \mathrm{N}$.
Mit der Rechte-Hand-Regel findet man heraus, dass die Kraft in Richtung Osten wirkt.

Aufgabe 11.4 Zylinder und Kugel (3 Punkte)

Ein Vollzylinder mit Masse M und Radius r ist an einer Achse durch den Punkt P befestigt, sodass er reibungsfrei um seine Symmetrieachse rotieren kann. Zunächst ist der Zylinder in Ruhe. Eine Gewehrkugel der Masse m, die als Punktmasse behandelt werden soll, trifft mit der Geschwindigkeit v auf den Rand des Zylinders und bleibt dort stecken. Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit des Zylinders? Wie viel kinetische Energie geht dem System durch den inelastischen Stoß verloren?



Lösung
Für das System aus Zylinder und Kugel gilt Drehimpulserhaltung. Die Drehimpulse vor und nach dem Auftreffen der Kugel L_i und L_f sollen bezüglich des Zylindermittelpunktes betrachtet werden. Da der Zylinder anfänglich ruht, hat lediglich die Kugel einen Beitrag an L_i und es gilt

$$\vec{L}_i = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} mv \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -rmv \end{pmatrix}$$

und

Übungsblatt 11 zur Experimentalphysik I

Name, Vorname: ______________________ Matrikelnummer: ⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴

$L_i = |\vec{L_i}| = rmv$.
Nach der Kollision rotiert das Gesamtsystem aus Zylinder und Kugel mit ω und es gilt
$L_f = I\omega = (I_Z + I_K)\,\omega = \left(\frac{1}{2}Mr^2 + mr^2\right)\omega = \left(\frac{1}{2}M + m\right) r^2\omega$.
Aus $L_i = L_f$ folgt
$\omega = \frac{mv}{\left(\frac{1}{2}M+m\right)r}$.

Für die kinetische Energie vor und nach dem Stoß gilt
$E_{kin\,i} = \frac{1}{2}mv^2$
$E_{kin\,f} = \frac{1}{2}I_Z\omega^2 + \frac{1}{2}I_K\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M + m\right)r^2\omega^2 = \frac{m^2v^2}{2\left(\frac{1}{2}M+m\right)}$
und somit
$\Delta E_{kin} = E_{kin\,f} - E_{kin\,i} = \frac{m^2v^2}{2\left(\frac{1}{2}M+m\right)} - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{2m^2v^2 - mv^2M - 2m^2v^2}{2M+4m} = -\frac{mM}{2M+4m}v^2$.

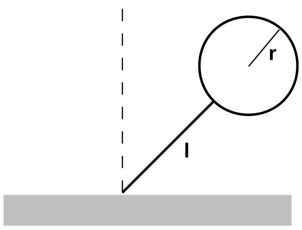
Aufgabe 11.5 Schwungrad 2 (2 Punkte)

Das Trägheitsmoment eines Schwungrads beträgt $I = 100\ \mathrm{kgm}^2$. Zum Zeitpunkt t_1 beträgt die Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 = 2\ \frac{1}{\mathrm{s}}$. Zum Zeitpunkt t_2 hat sich das Rad um einen Winkel von 100 gedreht und die Winkelgeschwindigkeit ist durch das Einwirken eines äußeren Drehmoments auf $\omega_2 = 10\ \frac{1}{\mathrm{s}}$ angewachsen. Berechnen Sie das Drehmoment.

Lösung:
Wir nutzen die Bewegungsgeichungen für die beschleunigte Drehbewegung:
$\omega_2 = \alpha\Delta t + \omega_1 = \frac{\tau}{I}\Delta t + \omega_1$
$\Theta_2 = \frac{1}{2}\alpha\Delta t^2 + \omega_1\Delta t + \Theta_1 = \frac{\tau}{2I}\Delta t^2 + \omega_1\Delta t + \Theta_1$
Umformen und einsetzen führt auf
$\Delta t = \Delta\omega\frac{I}{\tau}$
$\Delta\Theta = \frac{\tau}{2I}\Delta t^2 + \omega_1\Delta t = \frac{\tau}{2I}\Delta\omega^2\frac{I^2}{\tau^2} + \omega_1\Delta\omega\frac{I}{\tau} = \frac{I}{\tau}\left(\frac{\Delta\omega^2}{2} + \omega_1\Delta\omega\right)$
wobei $\Delta\Theta = \Theta_2 - \Theta_1$ und $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ gilt. Auflösen nach τ ergibt
$\tau = \frac{I}{\Delta\Theta}\left(\frac{\Delta\omega^2}{2} + \omega_1\Delta\omega\right) = \frac{I}{2\Delta\Theta}\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right) = 48\ \mathrm{Nm}$.

Aufgabe 11.6 Kreisel (3 Punkte)

Ein Kreisel besteht aus einer masselosen Stange der Länge $l = 2$ cm und einer aufgeklebten Kugel mit Masse $m = 0{,}2$ kg und Radius $r = 4$ cm. Der Kreisel rotiert mit $n = 800$ Umdrehungen pro Minute um seine Achse, die um einen Winkel α gegenüber der Senkrechten gekippt ist.



a) Wie groß ist das durch die Schwerkraft auf den Kreisel wirkende Drehmoment in Abhängigkeit von α?

b) Berechnen Sie den Betrag des Drehimpulses des Kreisels.

c) Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit mit der der Kreisel präzediert?

Lösung

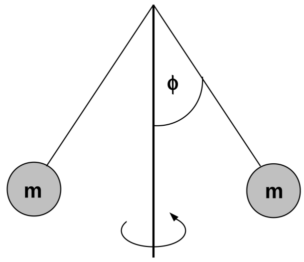
a) Es sei $R = l + r$. Für das Drehmoment gilt
$$\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} R\sin\alpha \\ R\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ mg \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Rmg\sin\alpha \end{pmatrix}.$$
Beziehungsweise
$\tau = Rmg\sin\alpha = 0{,}118\ \mathrm{Nm}\ \sin\alpha$.

b) Für den Drehimpuls gilt
$L = I\omega$, wobei $I = \frac{2}{5}mr^2$ und $\omega = \frac{2\pi n}{60\ \mathrm{s}}$ ist.

Demnach beträgt der Drehimpuls
$L = \frac{2}{5} m r^2 \frac{2\pi n}{60\ \mathrm{s}} = 0{,}011\ \frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}}$.

c) Es gilt
$\vec{\tau} = \vec{\omega}_p \times \vec{L}$,
wobei $\vec{\omega}_p$ in Richtung der gestrichelten senkrechten Achse zeigt und $\vec{L}$ die Richtung der Figurenachse des Kreisels hat. Demnach gilt
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Rmg\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_p \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L\sin\alpha \\ L\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$
beziehungsweise für die Beträge
$Rmg\sin\alpha = \omega_p L \sin\alpha$
und somit $\omega_p = \frac{Rmg}{L} = \frac{(l+r)mg}{L} = 10{,}7\ \frac{1}{\mathrm{s}}$

Aufgabe 11.7 Zentrifugalkraft (3 Punkte)



Zwei Massen m sind wie in der Abbildung dargestellt an masselosen Seilen der Länge l =20 cm an einer Stange befestigt. Welchen Winkel schließen die beiden Seile ein, wenn die Stange mit einer Drehzahl von $n = \frac{90}{\mathrm{min}}$ gedreht wird?

Lösung
Die auf die Massen wirkende Zentrifugalkraft $\vec{F}_Z$ wirkt in die Richtung der x-Achse und die Gewichtfkraft $\vec{F}_G$ in Richtung der y-Achse. Der von beiden Seilen eingeschlossene Winkel sei 2ϕ. Aus geometrischen Gründen ergibt sich
$\frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{F_Z}{F_G}$.
Für F_Z und F_G gilt
$\vec{F}_Z = m\vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})$ beziehungsweise $F_Z = m\omega^2 r$
und
$\vec{F}_G = m\vec{g}$ beziehungsweise $F_G = mg$.
Somit gilt
$\frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{\omega^2 r}{g}$.
Mit $\sin\phi = \frac{r}{l}$ (r ist der Abstand zwischen Kugel und Achse) und $\omega = 2\pi n$ ergibt sich weiterhin
$\frac{r}{l\cos\phi} = \frac{4\pi^2 n^2}{g}$
$\phi = \arccos\left(\frac{g}{l 4\pi^2 n^2}\right) = 113°$ und
$2\phi = 226°$.