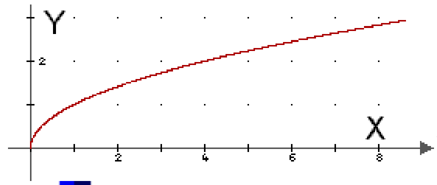
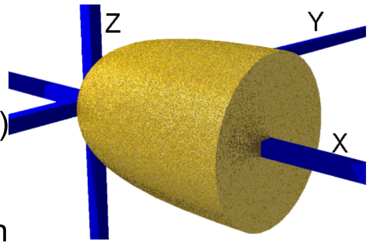
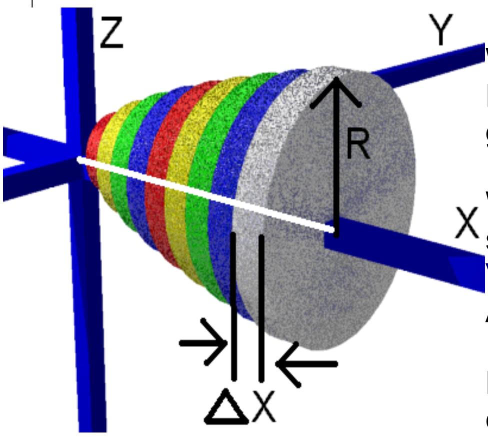
Volumina von Rotationskörpern



Ein Rotationskörper entsteht, wenn man eine Funktion um die X-Achse dreht:
Aus der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ (links) entsteht der Drehkörper (rechts)





Wir können jetzt den Rotationskörper in "n" Scheiben zerlegen. Hier deutlich gemacht durch verschiedene Farben.

Wie groß ist das Volumen einer Scheibe? Die Scheiben sind Zylinder. Für einen Zylinder gillt die Formel:
$V = \pi R^2 \cdot h$ "h" ist hier Δx und $R = f(x)$
Also $V = \pi f(x)^2 \cdot \Delta x$

Das Gesamtvolumen ist die Summe der Volumen der einzellnen Scheiben. Das schreiben wir:

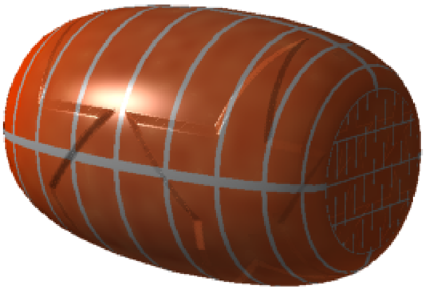
$\sum_{i=1}^{n} \pi f^2(x_i)$ $f(x)^2$ schreibt man auch $f^2(x)$

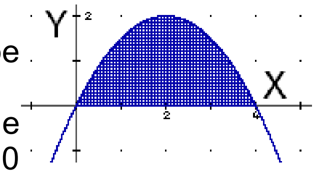
Wir lassen nun "n" gegen unendlich streben, wie wir es mit dem "n" für den Integral auch schon getan haben. Nach dem Grenzübergang lautet die Formel wie folgt:

$$\boxed{\int_a^b \pi f^2(x) \cdot dx}$$

Berechnen wir das Beispiel ein mal. Es ist nicht viel schwieriger als integrieren. Nur die Formel muss beachtet werden. Die Länge des Körpers sei 5 Einheiten:

$\int_0^5 \pi (\sqrt{x})^2 \cdot dx = \int_0^5 \pi x \cdot dx = \left[\tfrac{1}{2}\pi x^2\right]_0^5 = \tfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5^2 = \tfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot 25 = \pi \cdot 12{,}5 \approx \underline{39{,}270}$

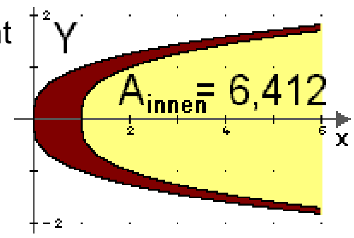




Versuche jetzt mal folgende Aufgabe alleine zu lösen:
Ein Football hergestellt, indem die Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ im Bereich 0 bis 4 um die X-Achse gedreht wird. Welches Volumen hat der Football?

Lösung: 89,361 Volumen-Einheiten.

Jetzt eine etwas schwierigere Aufgabe: Ein Tonkrug soll geformt werden. Die äußere Begrenzung der Wand des Tonkruges wird durch die Funktion $f(x) = x^{1/3}$ beschrieben, die innere Begrenzung durch $f(x) = (x - 1)^{1/3}$. Das Intervall ist [0; 6].



Tipp: Besser ist zunächst das Volumen beider Drehkörper getrennt auszurechnen und dann voneinander abzuziehen. Dabei gillt:

$$\boxed{\int f(x + a)dx = F(x + a) + C}$$

Lösung: Wir benötigen 11,090 Volumen-Einheiten Ton.